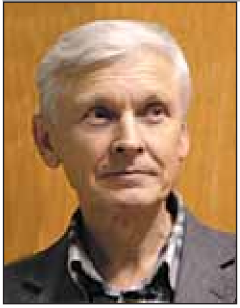


Чивилёв Виктор Иванович
*Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей физики
Московского физико-технического института (МФТИ),
Заслуженный работник высшей школы,
заместитель председателя научно-методического совета
Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ,
член жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике.*

Правило сложения скоростей

В этой статье на примерах решения конкретных задач рассматривается правило сложения скоростей, устанавливающее связь между скоростями одной и той же материальной точки в разных системах отсчёта. Разобраны задачи на непосредственное сложение скоростей, сложение скоростей при ударах о массивное движущееся тело, сложение скоростей при движении тел в поле тяжести. Приведены решения нескольких комбинированных задач, в которых используется сложение скоростей. Тексты условий и решений всех приведённых ниже задач предложены автором статьи. Лёгкими можно считать задачи с номерами 1, 2, 3, 4, 8, 9, 14. К сложным задачам, которые помечены *, допустимо отнести задачи с номерами 7, 11, 16, 17.

1. Введение

Правило сложения скоростей устанавливает связь между скоростями одной и той же материальной точки в разных системах отсчёта.

Напомним, что каждая система отсчёта жёстко связана с некоторым телом и движение материальной точки выглядит поразному в различных системах отсчёта.

Пусть есть две системы отсчёта S и S', движущиеся друг относительно друга. Поскольку движение и покой относительны, назовём систему S неподвижной, а систему S' - движущейся. Движение материальной точки М относительно системы S называют абсолютным движением, а относительно системы S' - относительным движением. Скорость точки М относительно системы S называют *абсолютной скоростью*, а относительно системы S' - *относительной скоростью*. Для более образного представления можно принять за систему S комнату, за систему S' - воздушный шарик, летящий с вращением, а за точку M – муравья, ползущего по шарику.

Введём ещё понятие *переносной скорости*. Это скорость той точки системы S' относительно системы S, через которую проходит в данный момент точка М (скорость относительно комнаты той точки воздушного шарика, через которую проползает муравей в данный момент).

В любой момент времени скорости абсолютная $\vec{v}_{абс}$, относительная $\vec{v}_{отн}$ и переносная $\vec{v}_{пер}$ связаны соотношением

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}.$$

Это и есть *правило сложения скоростей*, приведённое здесь без доказательства.

Сделаем три полезных замечания.

Замечание 1. Переносная скорость в общем случае не есть скорость системы S' относительно S! Действительно, при движении воздушного шарика с вращением скорость всех точек шарика относительно комнаты различная, и говорить о скорости шарика (системы S') относительно комнаты (системы S) бессмысленно. Только при поступательном (без вращения) движении S' относительно S скорость всех точек системы S' относительно S (переносная скорость) одна и та же и называется скоростью системы S' относительно системы S.

Замечание 2. Часто правило (закон) сложения скоростей формулируют следующим образом: абсолютная скорость тела равна сумме скорости тела относительно движущейся системы отсчёта и скорости самой движущейся системы. При поступательном перемещении движущейся системы отсчёта переносная скорость совпадает со скоростью этой системы отсчёта, т.к. скорость всех точек движущейся системы отсчёта (относительно неподвижной системы отсчёта) одна и та же. Поэтому при поступательном перемещении движущейся системы отсчёта такая формулировка правила сложения скоростей справедлива. Но попробуйте применить эту формулировку, когда движущаяся система отсчёта перемещается не поступательно, т.е. имеет вращение. В этом случае скорость всех точек движущейся системы отсчёта, вообще говоря, различная и нет ясности, что понимать под скоростью самой движущейся системы. Здесь при сложении скоростей уже не обойтись без понятия переносной скорости. Хорошей иллюстрацией к замечаниям 1 и 2 служат разобранные ниже задачи 1, 2 и 6.

Замечание 3. Соотношение между тремя скоростями – чисто кинематическое соотношение, никак не связанное с инерциальностью и неинерциальностью систем S и S', т.е. S и S' обе могут быть неинерциальными.

2. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

Задача 1. *По палубе теплохода, движущегося относительно берега со скоростью $u = 15$ км/ч, идёт пассажир со скоростью $v_0 = u/3$ относительно палубы в направлении, составляющем угол $\alpha = 60°$ с продольной осью теплохода (рис. 1). Найдите скорость пассажира относительно берега. Продольная ось теплохода направлена вдоль его скорости.*

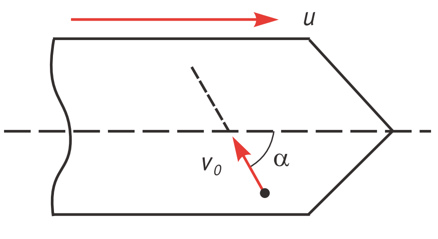


Рис. 1

Решение. Возьмём за неподвижную систему отсчёта берег, за движущуюся систему отсчета – теплоход. Тогда $\vec{v}_0$ – относительная скорость, $\vec{u}$ – переносная скорость, поскольку в произвольный момент времени скорость относительно берега точки теплохода, через которую проходит в этот момент пассажир, равна скорости теплохода из-за поступательного движения теплохода. Скорость $\vec{v}$ пассажира относительно берега будет абсолютной скоростью. По правилу сложения скоростей (рис. 2)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}.$$

Используя теоремы косинусов и синусов, находим модуль скорости v пассажира относительно берега и угол β между этой скоростью и осью теплохода:

$$v = \sqrt{u^2 + v_0^2 - 2v_0 u\cos\alpha} = \frac{u\sqrt{7}}{3} \approx 13 \text{ км/ч},$$

$$\sin\beta = \frac{v_0}{v}\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0{,}33, \quad \beta \approx 19°.$$

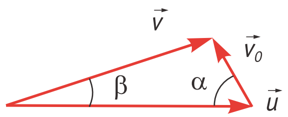


Рис. 2

Задача 2. *В комнате вращается диск с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси 0, проходящей через центр диска перпендикулярно плоскости диска. По диску вдоль его радиуса ползёт жук со скоростью v_0 относительно диска (рис. 3). Найдите модуль скорости жука относительно комнаты в момент, когда жук находится в точке A диска на расстоянии R от оси 0.*

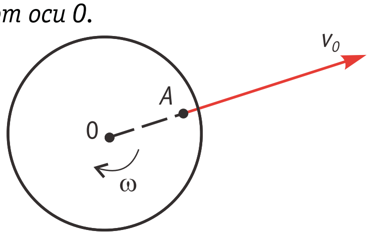


Рис. 3

Решение. За неподвижную систему отсчёта естественно взять комнату, а за движущуюся – диск. Тогда $\vec{v}_0$ – относительная скорость. Переносная скорость есть скорость относительно комнаты той точки диска, через которую проползает жук в данный момент. Поэтому переносной скоростью $\vec{v}_{пер}$ будет скорость точки A диска относительно комнаты. Эта скорость направлена перпендикулярно радиальному направлению 0A, причём

$$v_{пер} = \left|\vec{v}_{пер}\right| = R\ .$$

Скорость $\vec{v}$ жука относительно комнаты есть абсолютная скорость. По правилу сложения скоростей (рис. 4)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{пер}\ .$$

Итак, модуль скорости жука относительно комнаты

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_{пер}^2} = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2}\ .$$

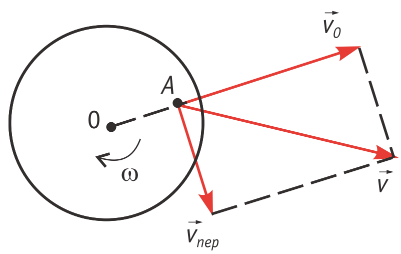


Рис. 4

Задача 3. *Рыбак на лодке переправляется на противоположный берег реки, двигаясь перпендикулярно линии берега. Ширина реки d = 200 м. Скорость течения реки u = 1,5 м/с, скорость лодки относительно воды v = 5u/3. Найти время переправы.*

Решение. Неподвижную систему отсчёта свяжем с берегом, а движущуюся - с водой. Тогда скорость течения $\vec{u}$ – переносная скорость, а скорость лодки относительно воды $\vec{v}$ – относительная скорость (рис. 5). Скорость лодки относительно берега направлена по условию задачи перпендикулярно линии берега и является абсолютной скоростью $\vec{v}_{абс}$. По правилу сложения скоростей

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v} + \vec{u}.$$

Имеем

$$v_{абс} = \sqrt{v^2 - u^2} = \frac{4}{3}u.$$

Время переправы

$$t = \frac{d}{v_{абс}} = \frac{3}{4}\,\frac{d}{u} = 100\ с.$$

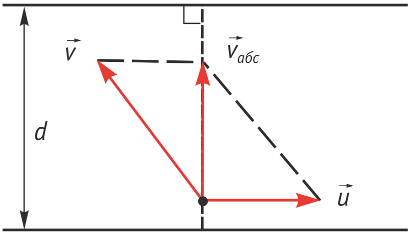


Рис. 5

Задача 4. *Идёт дождь, ветра нет. Трамвай движется прямолинейно со скоростью $v = 5$ м/с. Следы капель дождя на боковых вертикальных стёклах трамвая составляют угол $\alpha\,(tg\alpha = 1/3)$ с вертикалью. Найти скорость капель дождя.*

Решение. За неподвижную систему отсчёта возьмём Землю, а за движущуюся – трамвай. Скорость трамвая $\vec{v}$ – переносная скорость, скорость капель относительно трамвая – относительная скорость $\vec{v}_{отн}$. Скорость капель $\vec{v}_к$ относительно земли – абсолютная скорость, её и требуется найти. По правилу сложения скоростей (рис. 6)

$$\vec{v}_к = \vec{v}_{отн} + \vec{v}.$$

Скорость капель

$$v_к = v / tg\alpha = 3v = 15\ м/с.$$

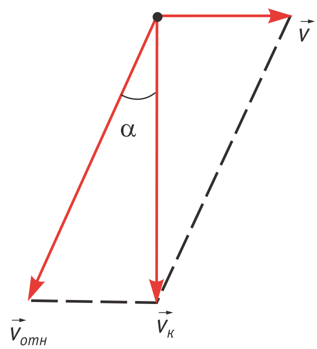


Рис. 6

Задача 5. *Катер движется на восток со скоростью $v = 7$ м/с. Ветер дует на северо-восток под углом $\beta = 15°$ к направлению движения катера (рис. 7). Флаг на мачте M образует угол $\alpha = 30°$ с направлением движения катера. Найти скорость ветра $v_в$.*

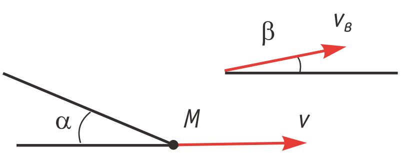


Рис. 7

Решение. За неподвижную систему отсчёта примем Землю, за движущуюся – катер. Скорость ветра (частичек воздуха) относительно Земли $\vec{v}_в$ есть абсолютная скорость, скорость катера $\vec{v}$ – переносная скорость. Скорость ветра относительно катера направлена под углом α к направлению его движения и является относительной скоростью $\vec{v}_{отн}$. По правилу сложения скоростей (рис. 8)

$$\vec{v}_в = \vec{v}_{отн} + \vec{v}.$$

По теореме синусов для треугольника, построенного на векторах $\vec{v}_в$ и $\vec{v}$,

$$\frac{v_в}{v} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180° - \alpha - \beta)}.$$

Отсюда скорость ветра

$$v_в = v\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{v}{\sqrt{2}} \approx 5\ м/с.$$

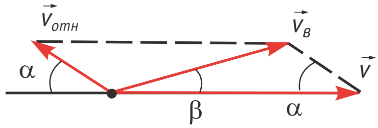


Рис. 8

Задача 6. *Радиус вращающейся планеты r = 2000 км. Скорость точек экватора планеты v_1 = 0,6 км/с. В плоскости экватора движется спутник в сторону вращения планеты со скоростью $v_2 = 2$ км/с по орбите с радиусом R = 3000 км. Найдите скорость спутника относительно планеты.*

Решение. За неподвижную систему отсчёта возьмём систему отсчёта, в которой заданы скорости v_1 и v_2. За движущуюся систему отсчёта возьмём планету. Абсолютная скорость спутника задана и равна v_2. Нам надо найти скорость спутника относительно планеты, т.е. относительную скорость $\vec{v}_{отн}$. Пусть в некоторый момент времени спутник проходит через точку *M*, жёстко связанную с планетой мысленным стержнем *OM* (рис. 9). Скорость точки *M* в неподвижной системе отсчёта и есть переносная скорость $\vec{v}_{пер}$. Найдём её. Угловая скорость вращения планеты

$$\omega = \frac{v_1}{r}.$$

Переносная скорость

$$v_{пер} = \left|\vec{v}_{пер}\right| = \omega R = v_1\frac{R}{r} = 0{,}9 \text{ км/с}.$$

По правилу сложения скоростей (рис. 9)

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}.$$

Видим, что относительная скорость спутника сонаправлена с абсолютной скоростью $\vec{v}_2$ и равна (по модулю)

$$v_{отн} = v_2 - v_{пер} = v_2 - v_1\frac{R}{r} = 1{,}1 \text{ км/с}.$$

Заметим, что ответ

$$v_{отн} = v_2 - v_1 = 1{,}4 \text{ км/с}$$

неверен, так как из-за вращения планеты переносная скорость не равна v_1!

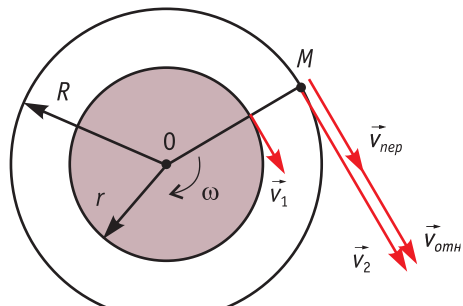


Рис. 9

Задача 7*. *По двум кольцевым дорогам радиусом R, лежащим в одной плоскости, движутся автомобили A_1 и A_2 со скоростями $v_1 = v = 20$ км/ч и $v_2 = 2v$ (рис. 10). В некоторый момент автомобили находились в точках M и C на расстоянии R/2 друг от друга. 1) Найдите скорость автомобиля A_2 в системе отсчёта, связанной с автомобилем A_1 в этот момент. 2) Найдите скорость автомобиля A_2 в системе отсчёта, связанной с автомобилем A_1, когда A_2 окажется в точке D. Размеры автомобилей малы по сравнению с R.* (Всероссийская олимпиада школьников по физике)

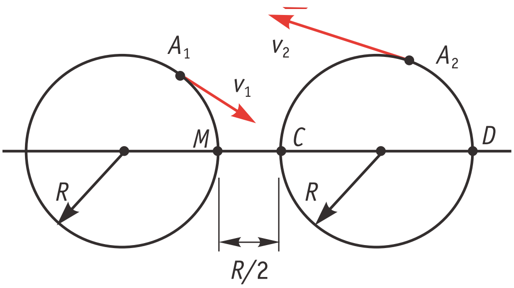


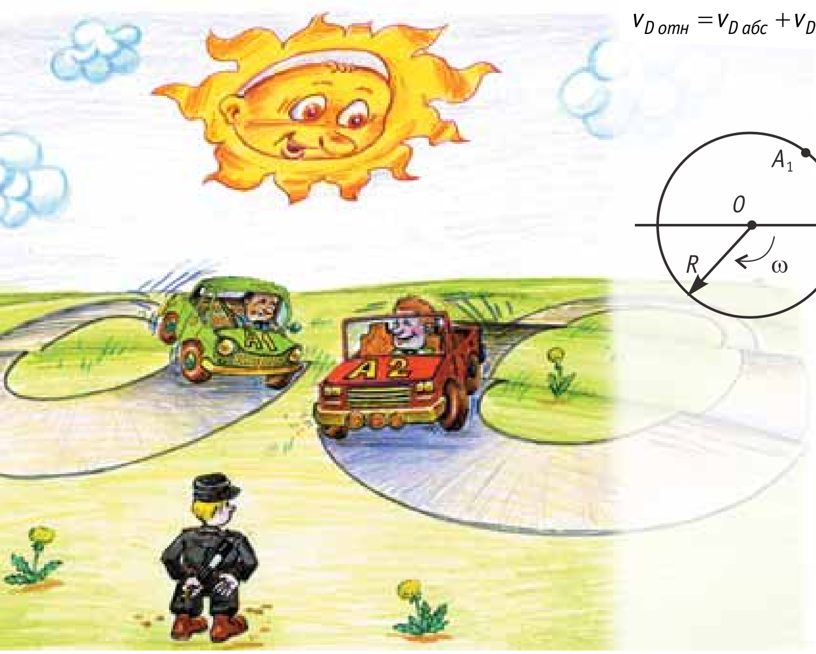
Рис. 10

Решение. За неподвижную систему отсчёта возьмём дорогу. Скорость автомобиля A_2 в этой системе отсчёта есть абсолютная скорость. Обозначим через $\vec{v}_{C\,абс}$ и $\vec{v}_{D\,абс}$ абсолютные скорости автомобиля A_2 при прохождении им точек C и D (рис. 11). Согласно условию задачи модули этих скоростей

$$v_{C\,абс} = v_{D\,абс} = 2v\,.$$

Движущуюся систему отсчёта жёстко свяжем с автомобилем A_1. Ясно, что эта система вращается вокруг оси O с угловой скоростью

$$\omega = \frac{v}{R}\,.$$



Переносные скорости при прохождении автомобилем A_2 точек C и D обозначим $\vec{v}_{C\,пер}$ и $\vec{v}_{D\,пер}$ (рис. 11). Модули этих скоростей

$$v_{C\,пер} = \omega \cdot OC = \frac{v}{R}\left(R + \frac{R}{2}\right) = \frac{3}{2}v,$$

$$v_{D\,пер} = \omega \cdot OD = \frac{v}{R}\left(R + \frac{R}{2} + 2R\right) = \frac{7}{2}v.$$

Нам надо найти относительные скорости $\vec{v}_{C\,отн}$ и $\vec{v}_{D\,отн}$ автомобиля A_2 в движущейся системе отсчета при прохождении им точек C и D. По правилу сложения скоростей (рис. 11)

$$\vec{v}_{C\,абс} = \vec{v}_{C\,отн} + \vec{v}_{C\,пер},$$

$$\vec{v}_{D\,абс} = \vec{v}_{D\,отн} + \vec{v}_{D\,пер}.$$

Модули относительных скоростей найдём, используя рисунок 11.

Итак, скорости автомобиля A_2 относительно автомобиля A_1 при прохождении точек C и D сонаправлены со скоростями (относительно дороги) автомобиля A_2 в этих точках и равны

$$v_{C\,отн} = v_{C\,абс} - v_{C\,пер} = 2v - \frac{3}{2}v = 0{,}5v = 10 \text{ км/ч},$$

$$v_{D\,отн} = v_{D\,абс} + v_{D\,пер} = 2v + \frac{7}{2}v = 5{,}5v = 110 \text{ км/ч}.$$

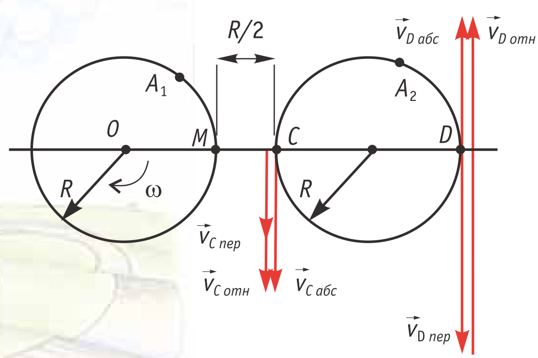


Рис. 11

3. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ПРИ УДАРАХ О МАССИВНОЕ ДВИЖУЩЕЕСЯ ТЕЛО

Рассмотрим упругий удар шарика (мяча) о массивное тело, неподвижное в некоторой инерциальной системе отсчёта. Будем считать, что тело не закреплено. Говоря о массивном теле, подразумеваем, что его масса намного больше массы шарика. Напомним, что удар двух тел называется упругим (иногда говорят абсолютно упругим), если суммарная кинетическая энергия соударяющихся тел до удара равна суммарной кинетической энергии этих тел после удара. Упругих ударов в реальных опытах не бывает, это идеализация. Но в некоторых ситуациях такая идеализация оправдана.

Из законов сохранения энергии и импульса можно показать, что при упругом ударе шарика (мяча) о массивное неподвижное тело скорость (по модулю) v_2 отскочившего шарика равна его скорости v_1 перед ударом, а угол падения α_1 равен углу отражения α_2 (рис. 12). Под углами падения и отражения понимаются углы между нормалью (перпендикуляром) к поверхности массивного тела в точке удара и скоростями шарика перед ударом и после удара. Из этих же законов следует, что скорость и кинетическая энергия массивного тела остаются нулевыми. Результат такого удара почти очевиден и легко запоминается, так как при упругом ударе шарика о неподвижную закреплённую стенку (плиту) имеем тот же результат.

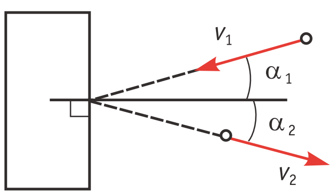


Рис. 12

Рассмотрим теперь упругий удар шарика о движущееся массивное тело. В этом случае скорости v_1 и v_2 мяча до удара и после удара не равны. Различными оказываются и углы α_1 и α_2 падения и отражения. На рис. 13 показан пример упругого удара шарика о массивную плиту, движущуюся со скоростью u .

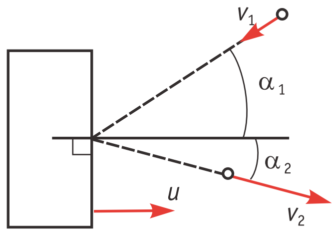


Рис. 13

Для расчёта результатов удара о движущееся массивное тело удобно перейти в систему отсчёта, связанную с массивным телом, рассмотреть в этой системе отсчёта удар, воспользовавшись равенством скоростей падения и отражения и равенством углов падения и отражения. Затем можно вернуться в систему отсчёта, в которой массивное тело движется (лабораторную систему), и получить результаты в лабораторной системе отсчёта. Придётся дважды применять правило сложения скоростей. Ниже приведены задачи, иллюстрирующие сказанное выше.

Задача 8. *Вагон движется со скоростью $u = 4$ м/с. Навстречу вагону летит мяч, имея непосредственно перед ударом о вертикальную стенку вагона скорость $v_1 = 10$ м/с, направленную перпендикулярно стенке и вдоль направления движения вагона (рис. 14). С какой скоростью отскочит мяч после упругого удара?*

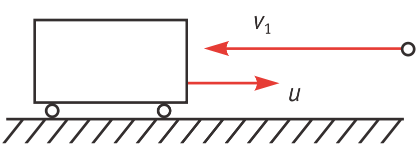


Рис. 14

Решение. Результат удара в лабораторной системе отсчёта (где заданы начальные скорости) не очевиден. В системе отсчёта, связанной с вагоном, результат удара известен: скорости мяча относительно вагона до и после удара равны (по модулю). Для решения задачи удобно перейти в систему отсчёта, связанную с вагоном, а затем вернуться в лабораторную систему, произведя необходимые сложения скоростей.

За неподвижную систему отсчёта возьмем лабораторную систему отсчёта, за движущуюся систему отсчёта выберем вагон. Обозначим через $\vec{v}_{1\,отн}$ и $\vec{v}_{2\,отн}$ относительные скорости мяча до и после удара. Модули этих скоростей обозначим через $v_{отн}$. Переносной скоростью является скорость вагона $\vec{u}$. Абсолютными скоростями мяча будут скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ до и после удара в лабораторной системе. По правилу сложения скоростей до и после удара (рис. 15)

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1\,отн} + \vec{u}, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_{2\,отн} + \vec{u}.$$

Отсюда

$$v_1 = v_{отн} - u, \quad v_2 = v_{отн} + u.$$

Из последних двух уравнений

$$v_{отн} = v_1 + u, \quad v_2 = v_1 + 2u.$$

Итак, после удара скорость мяча увеличилась и стала

$$v_2 = v_1 + 2u = 18 \text{ м/с}.$$

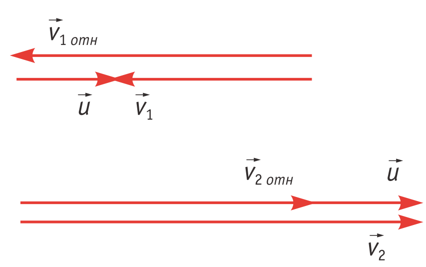


Рис. 15

Примечание. Приведённое решение задачи настолько подробно, что могут возникнуть трудности восприятия такого решения. Допустимо приводить следующее краткое решение этой задачи. Скорость мяча относительно вагона перед ударом равна $v_{отн} = v_1 + u$ и направлена влево. После удара скорость мяча относительно вагона равна $v_{отн}$ и направлена вправо. Скорость мяча относительно Земли после удара

$$v_2 = v_{отн} + u = v_1 + 2u = 18 \text{ м/с}.$$

Задача 9. *Вагон движется со скоростью $u = 4$ м/с. Его догоняет мяч, имея непосредственно перед ударом о вертикальную стенку вагона скорость $v_1 =$ 10 м/с, направленную перпендикулярно стенке и параллельно скорости вагона (рис. 16). С какой скоростью отскочит мяч после упругого удара?*

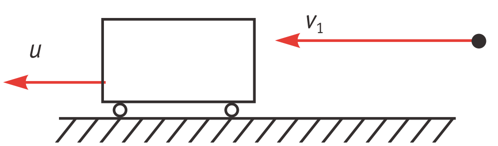


Рис. 16

Решение. За неподвижную систему отсчёта возьмем Землю, за движущуюся – вагон. Пусть $\vec{v}_{1\,отн}$ и $\vec{v}_{2\,отн}$ – относительные скорости до и после удара, причём

$$v_{1\,отн} = v_{2\,отн} = v_{отн}$$

Скорость вагона $\vec{u}$ – переносная скорость, скорости мяча $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ относительно Земли до и после удара – абсолютные скорости. По правилу сложения скоростей до и после удара (рис. 17)

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1\,отн} + \vec{u}, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_{2\,отн} + \vec{u}.$$

Имеем

$$v_1 = v_{отн} + u, \quad v_2 = v_{отн} - u.$$

Отсюда

$$v_{отн} = v_1 - u, \quad v_2 = v_1 - 2u.$$

Итак, после удара мяч полетел в обратном направлении с меньшей скоростью

$$v_2 = v_1 - 2u = 2 \text{ м/с}.$$

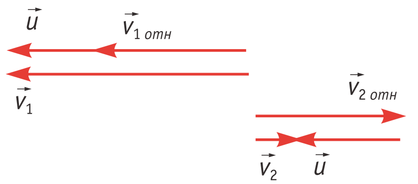


Рис. 17

Примечание. Если $v_1 < 2u$, то мяч полетит в прежнем направлении с уменьшенной скоростью $v_2 = 2u - v_1$.

Задача 10. *Массивный брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности стола со скоростью u и ударяет вертикальной гранью AC по шарику, скользившему по столу со скоростью v_1, составляющей угол α с нормалью к грани AC (рис. 18, вид сверху). Скорость бруска перпендикулярна грани AC, его масса намного больше массы шарика. Удар упругий. С какой скоростью и под каким углом отскочит шарик?*

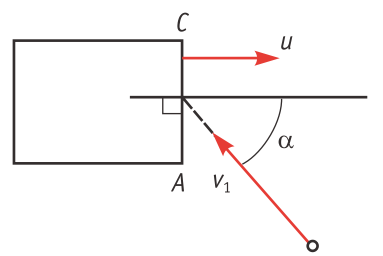


Рис. 18

Решение. Неподвижную систему отсчёта свяжем со столом, движущуюся – с бруском. Тогда $\vec{u}$ – переносная скорость. Скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ шарика относительно стола до и после удара – абсолютные скорости. Скорости шарика $\vec{v}_{1\,отн}$ и $\vec{v}_{2\,отн}$ относительно бруска – относительные скорости до и после удара. Причём относительные скорости равны по модулю и составляют одинаковые углы α_0 с нормалью к грани AC. Применим правило сложения скоростей до и после удара (рис. 19):

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1\,отн} + \vec{u}, \qquad \vec{v}_2 = \vec{v}_{2\,отн} + \vec{u}.$$

Находим проекции на оси x и y вектора $\vec{v}_2$:

$$v_{2x} = \left(u + v_1\cos\alpha\right) + u = 2u + v_1\cos\alpha,$$

$$v_{2y} = v_1\sin\alpha.$$

Скорость (по модулю) отскочившего шарика

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{\left(2u + v_1\cos\alpha\right)^2 + \left(v_1\sin\alpha\right)^2} =$$
$$= \sqrt{v_1^2 + 4uv_1\cos\alpha + 4u^2}.$$

Скорость отскочившего шарика составляет с нормалью к грани АС угол β такой, что

$$tg\beta = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \frac{v_1\sin\alpha}{2u + v_1\cos\alpha}.$$

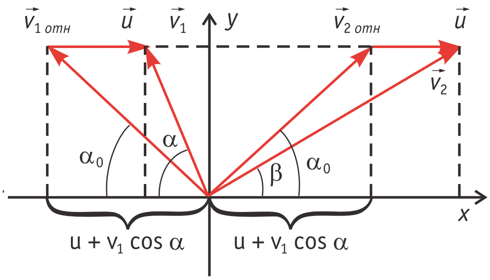


Рис. 19

Задача 11*. *Во время града автомобиль едет со скоростью u = 25 км/ч по горизонтальной дороге. Одна из градин ударяется о переднее (ветровое) стекло автомобиля, наклонённое под углом $\alpha = 30°$ к вертикали, и отскакивает горизонтально в направлении движения автомобиля (рис. 20). Считая, что удар градины о стекло абсолютно упругий и что скорость градины непосредственно перед ударом вертикальна, найти скорость градины: 1) до удара; 2) после удара.* (Вступительные экзамены МФТИ)

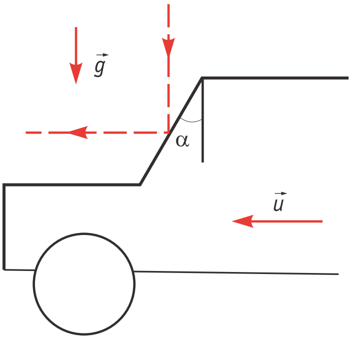


Рис. 20

Решение. За неподвижную систему отсчёта возьмём дорогу, а за движущуюся систему отсчёта – автомобиль. Надо найти скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ градины относительно дороги до и после удара, т.е. абсолютные скорости градины. По условию задачи скорость $\vec{v}_1$ направлена вертикально вниз, а скорость $\vec{v}_2$ - горизонтально (рис. 21).

Сразу после удара абсолютная скорость градины $\vec{v}_2$, её относительная скорость $\vec{v}_{2\,отн}$ и переносная скорость (скорость автомобиля) $\vec{u}$ связаны равенством

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2\,отн} + \vec{u}.$$

Поскольку скорости $\vec{v}_2$ и $\vec{u}$ горизонтальны, то скорость $\vec{v}_{2\,отн}$ тоже горизонтальна, причём

$$v_2 = v_{2\,отн} + u.$$

Относительная скорость $\vec{v}_{2\,отн}$ составляет с нормалью AB к поверхности стекла некоторый угол β – угол отражения. Из динамики известно, что при упругом ударе о поверхность неподвижного массивного тела угол падения равен углу отражения, а модули скоростей падения и отражения равны. Поэтому скорость градины относительно автомобиля непосредственно перед ударом $\vec{v}_{1\,отн}$ составляет тот же угол β с нормалью к поверхности стекла, и

$$v_{1\,отн} = v_{2\,отн}.$$

Установим связь между скоростями перед ударом. Абсолютная скорость $\vec{v}_1$, относительная скорость $\vec{v}_{1\,отн}$ и переносная скорость $\vec{u}$ связаны равенством

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1\,отн} + \vec{u}.$$

Из геометрии рисунка 21 легко показать, что

$$\beta = \alpha$$

и скорость $\vec{v}_{1\,отн}$ составляет с горизонтом угол 2β.

Используя рисунок 21, находим скорости градины до и после удара:

$$v_1 = u\,tg2\beta = u\,tg2\alpha = u\sqrt{3} \approx 43 \text{ км/ч},$$

$$v_2 = v_{2\,отн} + u = v_{1\,отн} + u = \frac{u}{\cos 2\beta} + u =$$

$$= u\left(\frac{1}{\cos 2\alpha} + 1\right) = 3u = 75 \text{ км/ч}.$$

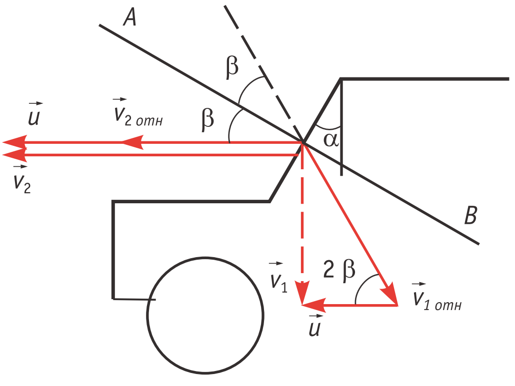


Рис. 21

4. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Бросим одновременно из разных точек два тела в поле тяжести Земли под разными углами к горизонту и с разными скоростями. Их движение по отношению друг к другу с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе отсчёта, связанной с Землей, выглядит достаточно сложно и многие результаты неочевидны. Перейдя в систему отсчёта, движущуюся поступательно вместе с одним из тел, можно увидеть, что движение другого тела выглядит очень просто.

Действительно, пусть начальные скорости одновременно брошенных тел равны $\vec{v}_{01}$ и $\vec{v}_{02}$. Тогда их скорости через время t будут

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{01} + \vec{g}t, \qquad \vec{v}_2 = \vec{v}_{02} + \vec{g}t.$$

Свяжем неподвижную систему отсчета с Землей, а движущуюся поступательно систему отсчета свяжем с первым телом. Рассмотрим движение второго тела. Для него $\vec{v}_2$ – абсолютная скорость, $\vec{v}_1$ – переносная скорость, $\vec{v}_{отн}$ – относительная скорость. По правилу сложения скоростей

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_1.$$

Отсюда

$$\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Учитывая записанные выше выражения для $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_1$, получаем

$$\vec{v}_{отн} = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01} = const.$$

Видим, что относительная скорость не зависит от времени. Это значит, что второе тело движется прямолинейно и равномерно по отношению к поступательно движущейся системе отсчёта, связанной с первым телом.

Рассмотрим примеры, повторив рассуждения в конкретных случаях.

Задача 12. *Два тела находятся на одной вертикали на расстоянии* $H = 13$ *м друг от друга. Нижнее тело бросают вертикально вверх со скоростью* $v_{01} = 10$ *м/с. Одновременно бросают верхнее тело вертикально вниз со скоростью* $v_{02} = 3$ *м/с. Через какое время тела встретятся?*

Решение. Решим задачу, используя сложение скоростей. С нижним телом свяжем поступательно движущуюся систему отсчёта, а с Землей – неподвижную систему отсчёта. Скорости нижнего и верхнего тел относительно Земли через время t после бросания

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{01} + \vec{g}t, \qquad \vec{v}_2 = \vec{v}_{02} + \vec{g}t.$$

Для движущегося верхнего тела $\vec{v}_2$ – абсолютная скорость, $\vec{v}_1$ – переносная скорость, $\vec{v}_{отн}$ – относительная скорость. По правилу сложения скоростей

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_1.$$

Из записанных равенств

$$\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01} = const.$$

На рис. 22 показан результат вычитания векторов $\vec{v}_{02}$ и $\vec{v}_{01}$. Видим, что верхнее тело движется с постоянной скоростью

$$v_{отн} = v_{01} + v_{02}$$

вертикально вниз относительно поступательно перемещающейся системы отсчёта, связанной с нижним телом. Время движения до встречи

$$t = \frac{H}{v_{01} + v_{02}} = 1\,c.$$

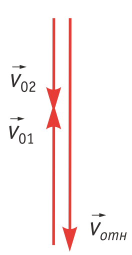


Рис. 22

Примечание. Если значение H достаточно велико, а значение v_{01} достаточно мало, то тела встретятся через время $t = H/(v_{01} + v_{02})$, но в точке, которая ниже точки бросания нижнего тела. Соответствующие условия опыта должны быть, конечно, обеспечены.

Задача 13. *В точках A и C находятся два тела, отстоящие по высоте на H и по горизонтали на S (рис. 23). Верхнее тело отпускают и оно свободно падает. Одновременно бросают нижнее тело. Под каким углом к горизонту надо бросить нижнее тело, чтобы тела столкнулись?*

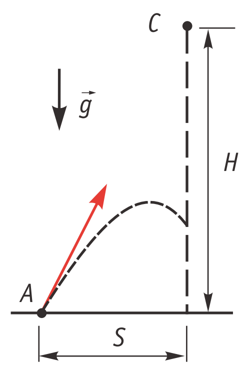


Рис. 23

Решение. За неподвижную систему отсчёта возьмём Землю. С поступательно движущейся системой отсчёта свяжем верхнее тело. Выясним характер движения нижнего тела в движущейся системе отсчёта. Скорости верхнего и нижнего тел через время t после бросания

$$\vec{v}_1 = \vec{g}t, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{g}t.$$

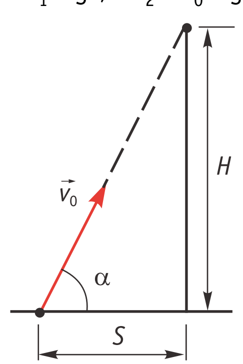


Рис. 24

Здесь $\vec{v}_0$ – начальная скорость нижнего тела. Запишем связь между абсолютной скоростью $\vec{v}_2$, переносной скоростью $\vec{v}_1$ и относительной скоростью $\vec{v}_{отн}$:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_1.$$

Имеем

$$\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \vec{v}_0 = const.$$

Получили, что нижнее тело перемещается с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ относительно движущейся системы отсчёта, в которой верхнее тело неподвижно. Чтобы столкнуться с этим неподвижным телом, скорость $\vec{v}_0$ нижнего тела должна быть направлена на верхнее тело (рис. 24). Итак, нижнее тело надо бросить под таким углом α к горизонту, для которого

$$tg\,\alpha = \frac{H}{S}.$$

Примечание. В зависимости от значения v_0 тела могут столкнуться как выше, так и ниже уровня, на котором находится точка A.

5. КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 14. *Плоское зеркало перемещается со скоростью $v =$ 5 см/с, направленной перпендикулярно плоскости зеркала (рис. 25). С какой скоростью и перемещается изображение неподвижного источника света S?*

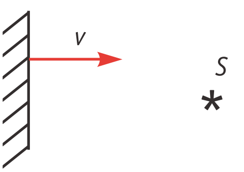


Рис. 25

Решение. Воспользуемся тем, что в плоском зеркале изображение и предмет симметричны относительно плоскости зеркала и поэтому всякое движение предмета вызывает симметричное движение изображения с такой же по модулю скоростью относительно зеркала.

Теперь ясно, что для решения задачи удобно перейти в систему отсчёта, связанную с зеркалом, найти скорость изображения относительно зеркала, а затем вернуться в лабораторную систему отсчёта (в ней задана скорость зеркала), связав скорости изображения в двух системах отсчёта правилом сложения скоростей.

Очевидно, что скорость v_1 источника S относительно зеркала равна v и направлена противоположно скорости зеркала (рис. 26). Это можно показать, взяв за неподвижную систему отсчета лабораторную систему, а за движущуюся – зеркало, а затем найти связь между скоростями источника в этих системах.

Скорость v_2 изображения S' относительно зеркала равна и противоположно направлена скорости v_1 источника S:

$$v_2 = v_1 = v.$$

Найдем теперь скорость изображения относительно лабораторной системы, т.е. u. Почти очевидно, что

$$u = v_2 + v = 2v.$$

Действительно, возьмём за неподвижную систему отсчёта лабораторную систему, за движущуюся – зеркало. Тогда для изображения u – абсолютная скорость, v – переносная скорость, v_2 – относительная скорость. По правилу сложения скоростей (рис. 26) находим

$$u = v_2 + v = 2v = 10 \text{ см/с}.$$

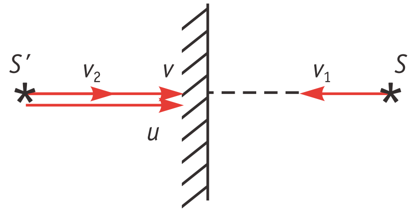


Рис. 26

Задача 15. *От неподвижного мяча удаляется массивная плита с постоянной скоростью $u = 2$ м/с, направленной вертикально вниз и перпендикулярно поверхности плиты. В момент, когда плита находилась на расстоянии $L = 0{,}3$ м от мяча, мяч отпускают. На какое максимальное расстояние от плиты удалится мяч после упругого удара о плиту? Масса мяча намного меньше массы плиты.* (Вступительные экзамены МФТИ)

Решение. Процесс решения этой задачи в системе отсчёта, связанной с Землей, очень трудоёмкий и сопровождается преодолением не только трудных мест, но и «ловушек». Например, в момент максимального удаления мяча от плиты скорость мяча (относительно Земли) не равна нулю, а равна скорости плиты и направлена вниз.

Решим задачу, перейдя в инерциальную систему отсчёта, связанную с плитой. В этой системе отсчёта в начальный момент мяч находился на расстоянии L от плиты и имел скорость u, направленную вверх (рис. 27). Это почти очевидно и приводить подробное доказательство с использованием правила сложения скоростей не будем.

Движение мяча в инерциальной системе отсчёта, связанной с плитой, это движение тела, брошенного вертикально вверх со скоростью u в поле тяжести Земли и имеющего в любой точке траектории ускорение $\vec{g}$. Мяч поднимется на дополнительную высоту

$$h = \frac{u^2}{2g},$$

остановится на расстоянии от плиты

$$H = L + h = L + \frac{u^2}{2g}$$

и начнёт затем свободно падать на плиту с ускорением $\vec{g}$. После упругого удара о неподвижную плиту мяч снова поднимется на высоту H, считая от плиты. Затем процесс повторится. На рис. 27 для наглядности траектория мяча «растянута» вдоль горизонтали. Теперь ясно, что максимальное удаление мяча от плиты после упругого удара о плиту равно

$$H = L + \frac{u^2}{2g} \approx 0{,}5 \text{ м}.$$

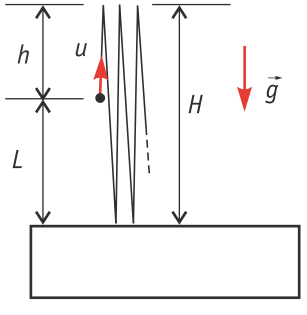


Рис. 27

Задача 16*. *Лента транспортёра на почте движется с постоянной скоростью v, находясь в одной плоскости с горизонтальной поверхностью стола. На ленту попадает небольшая коробка, двигавшаяся по столу со скоростью относительно стола v/2, направленной под углом $\alpha\left(\cos\alpha = 1/9\right)$ к краю ленты (рис. 28). Коэффициент трения скольжения между коробкой и лентой равен м. 1) Чему равна скорость коробки (по модулю) относительно ленты в начале движения по ленте? 2) При какой минимальной ширине* *ленты коробка не преодолеет ленту?* (Вступительные экзамены МФТИ)

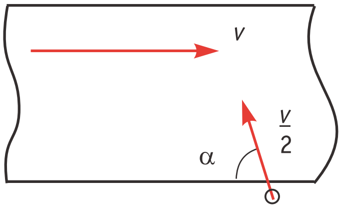


Рис. 28

Решение. Удобно за неподвижную систему отсчёта взять стол, а за движущуюся систему отсчёта – ленту. Тогда скорость ленты – переносная скорость $\vec{v}_{пер}$, причём

$$v_{пер} = \left|\vec{v}_{пер}\right| = v.$$

В начале движения по ленте скорость коробки относительно стола есть абсолютная скорость $\vec{v}_{абс}$, равная скорости коробки относительно стола до въезда на ленту (рис. 29). Поэтому

$$v_{абс} = \left|\vec{v}_{абс}\right| = \frac{v}{2}.$$

Скорость коробки относительно ленты в начале движения по ленте есть относительная скорость $\vec{v}_{отн}$. По правилу сложения скоростей

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}.$$

Используя теорему косинусов для треугольника из векторов скоростей (рис. 29), получаем

$$v_{отн}^2 = v_{пер}^2 + v_{абс}^2 - 2v_{пер}v_{абс}\cos\left(180° - \alpha\right).$$

С учётом выражений для $v_{пер}$ и $v_{абс}$ через v и значения $\cos\alpha$ находим после упрощений скорость коробки относительно ленты в начале движения по ленте:

$$v_{отн} = \frac{7}{6}v.$$

Для ответа на второй вопрос удобно перейти в инерциальную систему отсчёта, связанную с лентой. Относительно ленты коробка имеет начальную скорость $\vec{v}_{отн}$, направленную под некоторым углом γ к краю ленты, и движется прямолинейно равнозамедленно с ускорением, равным μg. При требовании минимальности ширины d ленты коробка остановится на ленте у противоположного края ленты, пройдя по ленте путь

$$S = \frac{d}{\sin\gamma}.$$

Для равнозамедленного движения по ленте

$$v_{отн}^2 = 2\mu g S.$$

Из последних двух равенств, с учётом полученного ранее выражения для $v_{отн}$ через v, находим

$$d = \frac{49}{72}\frac{v^2\sin\gamma}{\mu g}.$$

Найдём $\sin\gamma$. По теореме синусов для треугольника из векторов скоростей (рис. 29)

$$\frac{\sin\gamma}{\sin(180^0 - \alpha)} = \frac{v_{абс}}{v_{отн}}.$$

Здесь

$$\sin\left(180° - \alpha\right) = \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

С учётом выражений для $v_{абс}$ и $v_{отн}$ через v

$$\sin\gamma = \frac{4\sqrt{5}}{21}.$$

Подставив значение $\sin\gamma$ в выражение для d, находим минимальную ширину ленты:

$$d = \frac{7\sqrt{5}}{54}\frac{v^2}{\mu g}.$$

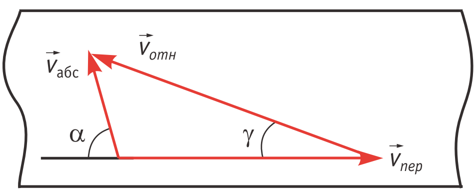


Рис. 29

Задача 17*. *Игрушечная пушка может скользить без трения по рельсам, укреплённым на горизонтальном полу. Ствол пушки наклонён под углом φ к горизонту (рис. 30). Масса пушки без снаряда M, масса снаряда m. Из покоившей-*

ся пушки произведён выстрел. В результате пушка, не отрывавшаяся от рельсов, получила скорость u. На каком расстоянии от места выстрела снаряд упал на пол? Высоту пушки не учитывать. Направления всех движений параллельны плоскости рисунка. (Вступительные экзамены МФТИ)

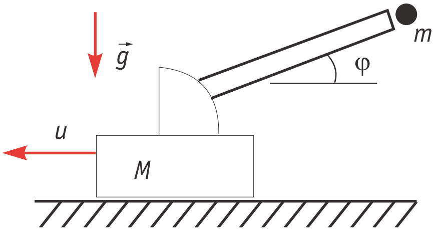


Рис. 30

Решение. Снаряд покидает ствол пушки со скоростью относительно пушки $v_{отн}$, направленной вдоль ствола. Пушка к этому моменту приобретает горизонтальную скорость u. Относительно Земли снаряд движется с некоторой скоростью v. Установим связь между этими скоростями.

Неподвижную систему отсчёта свяжем с Землей, движущуюся – с пушкой. Тогда для снаряда $v_{отн}$ – относительная скорость, u – переносная скорость, v – абсолютная скорость. Результат сложения скоростей показан на рисунке 31. Видим, что снаряд вылетает из ствола со скоростью v относительно Земли, направленной под некоторым углом α к горизонту, который не равен φ!

Разложим скорость v на горизонтальную и вертикальную составляющие v_1 и v_2 и найдем их. Из геометрии рисунка 31 легко показать, что

$$tg\,\varphi = \frac{v_2}{v_1 + u}.$$

Проекция на горизонтальное направление импульса системы пушка-снаряд сохраняется:

$$mv_1 - Mu = 0.$$

Из записанных уравнений находим

$$v_1 = \frac{Mu}{m}, \quad v_2 = \frac{M+m}{m} u\, tg\,\varphi.$$

Определим дальность полёта снаряда по горизонтали, зная v_1 и v_2. Время полёта до верхней точки траектории

$$t = \frac{v_2}{g}.$$

Дальность полёта

$$S = v_1 \cdot 2t = \frac{2v_1 v_2}{g}.$$

С учётом выражений для v_1 и v_2 находим, что снаряд упадёт на пол на расстоянии от места выстрела

$$S = \frac{2M(M+m)}{m^2} \frac{u^2}{g} tg\,\varphi.$$

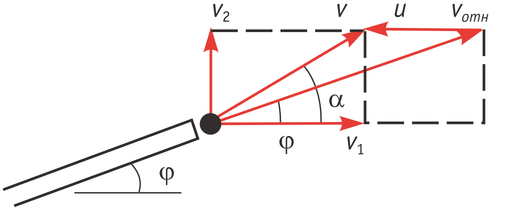


Рис. 31.

Примечание. Не учёт того, что снаряд вылетает относительно Земли под углом к горизонту α, который не равен углу наклона ствола к горизонту φ, приводит к неверному ответу

$$S = \frac{2M^2}{m^2} \frac{u^2}{g} tg\,\varphi.$$